

Seconda prova scritta - 29 agosto 2018

Traccia di matematica

Il candidato svolga quattro dei cinque esercizi.

Esercizio A

Si consideri un parallelogramma ABCD ed i triangoli equilateri AEB e BFC giacenti esternamente su due lati consecutivi dello stesso.

- Dimostrare che il triangolo DEF è equilatero.
- Trovare, se esiste, l'angolo BAD per cui viene minimizzato il rapporto tra 1) la somma delle aree dei due triangoli AEB e BFC e 2) l'area del parallelogramma ABCD.
- Trovare, se esiste, il valore minimo che tale rapporto assume al variare degli angoli e dei lati del parallelogramma.

Esercizio B

Dato n numero intero positivo, sia $X_n = n^3 + 2n$.

- Dimostrare che X_n è multiplo di 3 per ogni n .
- Dimostrare che esistono infiniti valori di n per cui X_n non è multiplo né di 26 né di 34.

Esercizio C

Il manager dell'impresa Moulinell deve decidere se produrre o meno un modello di frullatore che farebbe competizione ad un modello attualmente prodotto dall'impresa Braus.

- Se decide di non produrlo, la Moulinell non otterrà alcun guadagno e la Braus guadagnerà 10 milioni.
- Se invece lo produce, l'impresa Braus dovrà a sua volta decidere se ritirare la produzione del proprio, concedendo un profitto di 11 milioni di euro alla Moulinell e non guadagnando nulla, oppure mantenerlo.
- In questo ultimo caso, la Moulinell potrà poi decidere se fissare un prezzo maggiore a quello della Braun (nel qual caso la Moulinell perderà 2 milioni e la Braus ne guadagnerà 8), uguale (nel qual caso sia la Moulinell che la Braus ne guadagneranno 3) o minore (nel qual caso la Moulinell guadagnerà 6 milioni e la Braus ne perderà 3).

Le tre scelte sono fatte in sequenza: ognuna delle due aziende osserva le scelte precedenti, ma non comunica con l'altra.

Stabilire se al manager della Moulinell convenga o meno produrre il nuovo frullatore, a seconda che il suo obiettivo sia:

- garantire alla propria azienda il profitto più alto possibile,
- garantire il profitto minore possibile alla Braus,

- garantire il profitto *totale* per le due aziende più alto possibile.

Esercizio D

Alberto e Bernardo si trovano davanti a tre scatole chiuse su un tavolo. Sanno che dentro alle scatole ci sono tre nomi “Alberto”, “Bernardo” e “Carla” – ogni nome dentro ad una scatola. Ma nessuno dei due conosce l’abbinamento tra scatole e nomi. Ognuno dei due, cominciando da Alberto, deve scegliere una scatola da aprire (tra quelle ancora chiuse): vince se apre quella con il proprio nome, altrimenti perde.

- Che probabilità ha Bernardo di vincere?
- Che probabilità ha Bernardo di vincere se invece Alberto sa dove stanno i nomi (ma non può comunicarlo a Bernardo)?
- In preda ad un’allucinazione, Bernardo sostiene di vedere il suo nome dentro ad una delle tre scatole chiuse, e la prende in mano, senza aprirla. Alberto sa dove stanno i nomi e vuole, se possibile, aiutare Bernardo, ma è costretto a scegliere tra le scatole rimaste sul tavolo. Dopo che Alberto ha aperto una scatola, Bernardo rinsavisce e si rende conto che la sua era solo un’allucinazione, e non sa se aprire la scatola che aveva preso, o l’altra rimasta chiusa. Cosa conviene fare a Bernardo, e che probabilità avrà di vincere?

Esercizio E

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la seguente funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 2x_2, 1 - x_1 + 2x_2 - x_3) ,$$

con x_1, x_2 e x_3 tre numeri reali. Essa può essere pensata come una trasformazione dello spazio perché trasforma punti in punti.

- Calcolare l’immagine del punto $(3, 2, 1)$.
- Determinare l’insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) tali che $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.
- Determinare l’insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) tali che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$.
- Determinare l’insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) tali che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 1 - x_3)$.

Traccia di filosofia

Rivoluzione, progresso, dialettica. Filosofie del cambiamento storico nell’età moderna e contemporanea.

Traccia di storia

Il “grande malato d’Europa”. La disgregazione dell’Impero Ottomano tra nazionalismi e imperialismo.