SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Matematica - 27/08/2019

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.
Ognuno dei 3 esercizi deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.
Si ricorda di usare per la scrittura, pena esclusione, solamente ed esclusivamente la penna fornita in dotazione dalla commissione.

Esercizio 1. La Scuola Sant'Anna ha comprato alcuni computer che, una volta installati e messi in funzione, hanno una probabilità p di guastarsi (irrimediabilmente) per ogni anno. Al momento del guasto viene registrato l'anno in cui il guasto è avvenuto.

(a) Se un computer B viene messo in funzione N anni dopo un computer A (con $N \geq 0$) determinare la probabilità che i due computer si guastino nello stesso anno.
(b) Se un computer B viene messo in funzione N anni dopo un computer A (con $N \geq 0$) determinare la probabilità che il computer B si guasti prima (cioè in un anno *strettamente* precedente) del computer A.
(c) Nel caso di tre computer A, B, C, messi in funzione rispettivamente negli anni 2017, 2018, 2019, determinare la probabilità che i tre computer si guastino nello stesso anno.

Esercizio 2. Quattro allievi del Sant'Anna (Antonio, Beatrice, Cinzia e Dario, indicati con A, B, C e D per comodità) fanno il seguente gioco, dove un intero $N \geq 1$ è fissato a priori.

- Il gioco si svolge a squadre: A e C contro B e D
- A inizia dicendo un numero intero da 1 a n_A;
- B continua dicendo a sua volta un numero intero da 1 a n_B e calcola la somma dei numeri detti finora;
- poi è il turno degli altri giocatori C e D che dicono a loro volta un numero intero compreso fra 1 e n_C e fra 1 e n_D, rispettivamente.
- Poi si continua di nuovo con A e così via.
- Vince la squadra che dice il numero che permette alla somma dei numeri detti dall'inizio del gioco di arrivare a N.

(a) Assumendo $n_A = n_B = n_C = n_D = n$ e $n \geq 2$, esiste una strategia con cui una delle due squadre riesce a vincere con certezza? Se sì, quale squadra e con quale strategia? Se no, perchè non esiste una strategia?
(b) Assumendo $n_A = 15$, $n_B = 10$, $n_C = 5$, $n_D = 10$ e $N = 500$, esiste una strategia con cui una delle due squadre riesce a vincere con certezza? Se sì, quale squadra e con quale strategia? Se no, perchè non esiste una strategia?

Esercizio 3. Mostrare, preliminarmente, che tra tutti i triangoli di area A il triangolo di perimetro P minimo è quello equilatero. Dedurre la più piccola costante C per cui vale la disuguaglianza

$$\sqrt{A} \leq CP \qquad \text{per ogni triangolo.}$$

Incollare 2 triangoli vuol dire considerare la figura piana ottenuta unendo i 2 triangoli in modo che uno dei lati del primo triangolo coincida con uno del secondo (dunque i 2 triangoli devono avere almeno un lato uguale) e che l'interno delle figure non si intersechi.

(a) Mostrare che incollando 2 copie uguali o riflesse di uno stesso triangolo si ottiene un quadrilatero (anche non convesso) oppure un triangolo. In quali casi si ottiene un triangolo ed in quali un parallelogramma?

(b) Determinare il triangolo T di area A fissata tale che incollando 2 copie uguali o riflesse di T si ottiene la figura di perimetro P minimo. Determinare quale figura si ottiene, il suo perimetro, e la più piccola costante C per cui

$$\sqrt{A} \leq CP \qquad \text{per ogni figura ottenuta incollando due triangoli.}$$

(c) Svolgere il punto (b) sostituendo la parola triangolo con la parola quadrilatero, dove l'incollamento di due quadrilateri è definito in modo analogo.